УДК 681.03

АЙЛАНА ВА ЮЛДУЗ ШАКЛЛИ ФРАКТАЛЛАРНИ ДЕФОРМАЦИЯЛАШ НАТИЖАСИДА ИНВЕРСИОН ФРАКТАЛЛАР ТЎПЛАМИНИ ЯРАТИШ АЛГОРИТМИ

Зулайхо Эргаш қизи ИБРОҲИМОВА
Таянч докторант
Рақамли технологиялар ва суньий интеллектни
ривожлантириш илмий-тадқиқот институти
Тошкент, Ўзбекистон
Zuli117@mail.ru

Аннотация

Ушбу мақолада айлана инверсияси трансформациясини юлдуз шакллари тўпламига умумлаштириш орқали юлдузсимон инверсион фракталларни яратиш алгоритми такомиллаштириш масалалари таҳлил қилинган.

Таянч сўзлар: Инверсия, фрактал, аполлония, юлдуз шаклли инверсион фракталлар.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ИНВЕРСИОННЫХ ФРАКТАЛОВ В РЕЗУЛЬТАТЕ ДЕФОРМАЦИИ КРУГЛЫХ И ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФРАКТАЛОВ

Зулайхо Эргаш кизи ИБРОХИМОВА
Базовый докторант
Научно-исследовательский институт развития цифровых
технологий и искусственного интеллекта
Ташкент, Узбекистан
Zuli117@mail.ru

Аннотация

В настоящей статье анализируются вопросы совершенствования звездчатых инверсионных фракталов через обобщение трансформации круговых инверсий комплекс звездообразных форм.

Ключевые слова: инверсия, фрактал, аполлония, звездчатые инверсионные фракталы.

Фракталлар тушунчаси биринчи марта 1970 йилларда Манделброт томонидан фанга киритилган [1] Манделброт гипотезаларига асосланиб, Барнсли фракталларнинг амалий жиҳатларини ёритиб берувчи бир қанча инновацион ғояларни илгари сурди. У табиий фракталларни моделлаштириш усулини тақдим этди ва генератив восита сифатида итератив функциялар тизими (IFS) тушунчасидан фойдаланган. Шундан буён фракталлар нақшни аниқлаш [3], тасвирни қайта ишлаш [4] компютер графикасидаги кўплаб иловаларда қўлланилган. Фракталларни геометрик дизайн яратишда [5], компютер графикаси [6] тасвирлар жамланмаси [7], тиббиёт [8] ва археологияда қўллаш мумкин [9].

Айланали инверсион фракталлар. Айланаларни тескари айлантириш (айланаларнинг инверсияси), унинг Лоси текислиги Фреганинг Аполлониус китобида келтирилган бўлиб, Аполлоний айланаларнинг инверсиясини киритганидан бери бу тушунча геометрияда кўп қўлланилади.

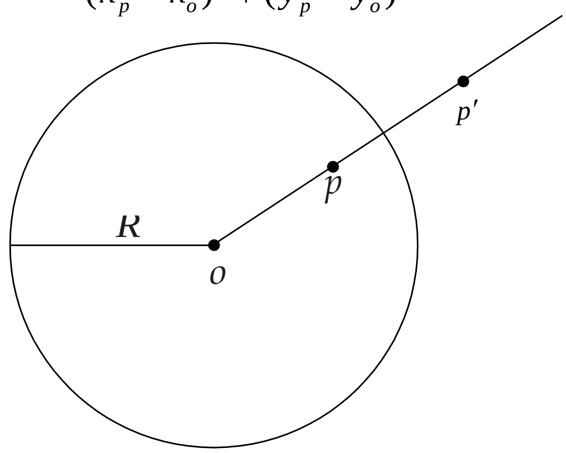
Таъриф 1. C - маркази o ва радиуси R бўлган айлана бўлсин ва p - o нуқтадан ташқари бўлган ихтиёрий нуқта бўлсин. Агар p' $p(t) = o + t(p - o)$ нуридаги нуқта бўлса, бу ерда $t \in [0,\infty)$, қуйидаги тенгламани қаноатлантиради:

$$d(o,p) \cdot d(o,p') = R^2, \qquad (1)$$

бу ерда $d : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to [0,\infty)$ - Евклид метрикаси ва p' C айлана учун p нинг ўзаро нисбати (1-расм). o нуқта инверсия маркази, C эса инверсия айланаси дейилади. p ни олиб, уни p' га айлантирувчи трансформация айлана инверсия трансформацияси деб аталади ва I_C билан белгиланади.

(1) муносабатдан айлана инверсия трансформациясининг алгебраик шаклини олиш мумкин. Агар $o = (x_o, y_o)$ ва $p = (x_p, y_p)$ десак, I_C қуйидаги кўринишдаги формулага эга бўлади:

$$p' = I_C(p) = (x_0, y_0) + \frac{R^2}{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2}(x_p - x_o, y_p - y_o). \qquad (2)$$



1-расм: Маркази o ва радиуси R бўлган айлана учун p нинг инверсияси.

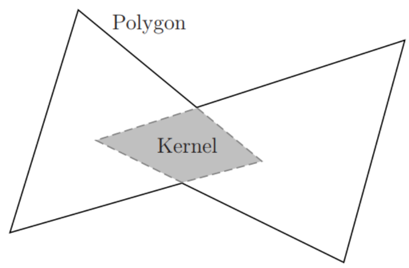
1-таърифга асосан p нуқта o дан бошқа ихтиёрий нуқта ҳисобланади, лекин таърифни o га ҳам қўллаш мумкин [10]. Агар $p = o$ бўлса, $I_C(o) = \infty$ ва $p = \infty$ бўлса, $I_C(\infty) = o$ бўлади. Натижада I_C $\hat{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$ сифатида аниқланади.

Таъриф 2. Оддий P кўпбурчак юлдузсимон бўлади, агар P дан ташқарида бўлмаган z нуқта мавжуд бўлса, P нинг барча p нуқталари учун $\overline{zp}$ чизиқ сегменти тўлиқ P ичида ётса. Юқоридаги хусусиятга ега бўлган z нуқталарининг жойлашуви P нинг ядросидир.

Барча қаварик кўпбурчаклар юлдузли кўпбурчаклар бўлиб, уларнинг ичида ядро мавжуд. Юлдузли кўпбурчакнинг ядроси доимо қаварик бўлади. 2-расмда юлдузли кўпбурчакка мисол келтирилган.

Юлдуз шаклидаги кўпбурчак тушунчасини тўпламга қуйидагича умумлаштириш мумкин:

Таъриф 3. $\mathbf{R}^2$ нинг C тўплами юлдуздир, агар ҳар бир $p \in S$ нуқта учун $z \in$ *int C* нуқтаси мавжуд бўлса (бу ерда *int C* C нинг ички қисмини билдиради), $\overline{zp}$ чизиқли сегменти тўлиқ C ичида жойлашган. Унинг

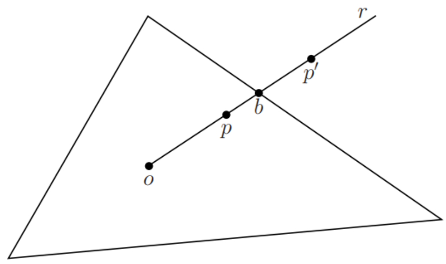


траекторияси бўйича хоссаларга эга бўлган z нуқта C нинг ядросидир.

2-расм: Юлдуз шаклли кўпбурчаклар ва уларнинг ядролари

3-расм: Юлдуз шаклларининг (учбурчаклар) берилган тўплами учун p нинг инверсияси.

C юлдузлар тўплами ва C ядросига тегишли бўлган o нуқта мавжуд



бўлсин. Бундан ташқари, o дан бошқа p нуқта бор деб фараз қилиб, C га нисбатан p нинг инверсияси аниқланади. Бунинг учун o дан p - o га r нур ўтказилади. Яъни, $r(t) = o + t(p - o)$, $t \in [0, \infty)$ учун C нинг чегараси ва кесишмаси b аниқланади (3-расм). C юлдузсимон бўлгани ва o унинг ядросига тегишли бўлгани учун b нуқта ягонадир. Агар қуйидаги тенглама бажарилса, у C га нисбатан p нинг инверсияси дейилади:

$$d(o, p) \cdot d(o, p') = \left[d(o, b)\right]^2. \tag{3}$$

Айлана инверсияси учун o нуқта инверсия маркази деб аталади. p ни қабул қилиб, уни p' га айлантирувчи трансформация юлдуз шаклидаги тўплам инверсион трансформацияси деб аталади ва у I_S билан белгиланади. Албатта, шунга ўхшаш тарзда, I_S таърифини o га умумлаштириш мумкин, шунинг учун $I_S(o) = \infty$ ва $I_S(\infty) = o$. Юқоридаги конфигурациядан кўриниб турибдики, юлдуз шаклидаги тўпламнинг инверсияси ўзгариши инверсия маркази o томонидан берилиб, бир хил C тўплам учун турлича бўлиши мумкин.

I_S учун алгебраик ифода қуйидаги I_C формулага жуда ўхшаш шаклга эга. Агар $o = (x_0, y_0)$ ва $p = (x_p, y_p)$ бўлса, I_S қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$p' = I_S(p) = (x_o, y_o) + \frac{\left[d(o,b)\right]^2}{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2}(x_p - x_o, y_p - y_o). \tag{4}$$

C $\hat{\mathbf{R}}^2$ ни учта компонентга ажратади: B = int C (чегара компоненти), $U = \hat{\mathbf{R}}^2 \setminus S$ (чегарасиз компонент) ва ∂C. Юлдуз шаклидаги тўплам инверсияси трансформацияси айлана инверсиясига ўхшаш қуйидаги хусусиятларга эга:

1. I_S B ва U алмашинади,

2. I_S - бу C даги идентификация,

3. I_S - U даги қисқариш ва B даги кенгайиш,

4. I_S инволюция, яъни барча $p \in \hat{\mathbf{R}}^2$ учун $I_S(I_S(p)) = p$.

Юлдуз шаклидаги инверсион тўплам трансформациясининг таърифи ва унинг хусусиятларига кўра юлдуз шаклидаги тўплам инверсия фракталларининг яқинлашувини яратиш алгоритми қурилди (1-алгоритм). Ушбу алгоритм Фраме ва Согевина томонидан таклиф қилинган стохастик инверсия алгоритмининг ўзгартирилган ҳолидир [10]. Ўзгариш инверсион айлана конвертацияси ўрнига юлдуз шаклидаги тўплам инверт конвертациясидан фойдаланишдан иборат.

1-алгоритм: Тасодифий инверсия алгоритми.

Кириш: $S_1,...,S_k$ - танланган инверсия марказлари билан юлдуз шаклидаги тўпламлар, p_0 - $S_1,...,S_k$ дан ташқаридаги бошланғич нуқтаси, $n > 20$ – такрорлашлар сони.

Натижа: Чекланган тўпламнинг чегаравий яқинлашиши (юлдуз шаклидаги инверсион фракталлар тўплами).

```
j = {1, . . . , k} дан тасодифий рақам
p = I_{S_j}(n_0)
for i = 2 to n do
    {
    l = {1, . . . , k} дан тасодифий рақам
    while j = l or inSet(S_l, p) do
        l ={1, . . . , k} дан тасодифий рақам
    j = l
    p = I_{S_j}(n)
    if i > 20 then
        Plot p
    }
```

Фракталнинг тахминий маълумотларини яратиш учун юлдузлар тўпламининг инверсион ўзгаришлари, барча юлдузлар тўпламидан ташқаридаги бошланғич нуқта ва бир қатор итерациялар керак бўлади. Биринчидан, инверсия тасодифий танланади ва бошланғич нуқтасини ўзгартириш учун ишлатилади. Чунки бошланғич нуқта трансформацияни белгиловчи юлдузлар тўпламидан ташқарида бўлади, яъни у трансформациянинг чексиз U компонентига киради ва 1-хусусиятга кўра ўзгартирилган нуқта трансформациянинг B чегара компонентида конвертация бўлади. Кейин у ҳар бир итерацияда иккита чеклов билан тасодифий трансформацияни танлайди. Биринчи чеклов шундан иборатки, олдинги итерацияда ишлатилган конвертация билан нуқталар ўзгартирилмайди. Бу чеклаш I_S инволюция эканлигидан келиб чиқади (4-ифода). Ушбу чекловсиз фракталга яқинлашадиган нуқталар сонини камайтириш мумкин ва яхшироқ яқинлаштириш учун кўпроқ итерациялар талаб қилинади. Иккинчи чеклов шундан иборатки, нуқтани чегараловчи B компонентининг ичида жойлашган конвертация билан ўзгартириш амалга оширилмайди. Бу чегара 3-ифоданинг натижасидир. Трансформация кенгайиш эмас, балки қисқаришдир, чунки конвертациянинг кенгайтма бўлишига рухсат бериш ўзгартирилган нуқталарни четга суриб қўйиши ва яқинлашувни мураккаблаштириши мумкин. Шунингдек, қисқариш алгоритмнинг яқинлашишини исботлайди. Агар ўзгартириш танланса, у олдинги итерациядаги нуқталарга айланади. IFS учун тасодифий итератив алгоритмда бўлгани каби, дастлабки бир нечта нуқталар ўтказиб юборилади, чунки улар яқинлашишнинг бир қисми эмас. Алгоритм дастлабки 20 та қадамни ўтказиб юборади.

Алгоритм такрорлаш орқали чегарага етганда, ҳосил қилинган нуқталар (бошланғич нуқтанинг орбиталари) чекланган чегаралар тўпламига, яъни нуқта траекторияларининг чегаравий тўпламига яқинлашади. Агар баъзи орбита p_i нуқта юлдузлар тўпламида S_j бўлса, у ҳолда кейинги орбита нуқта p_{i+1} $I_{Sj}(p_i)$ бўлиши мумкин эмас. Чекланган чегаралар тўплами (айланалар учун) атамаси Кланси ва Фраме томонидан киритилган. Алгоритмни яқинлашувининг исботи Смит томонидан тақдим этилган айлана инверсия алгоритмининг исботига ўхшаш.

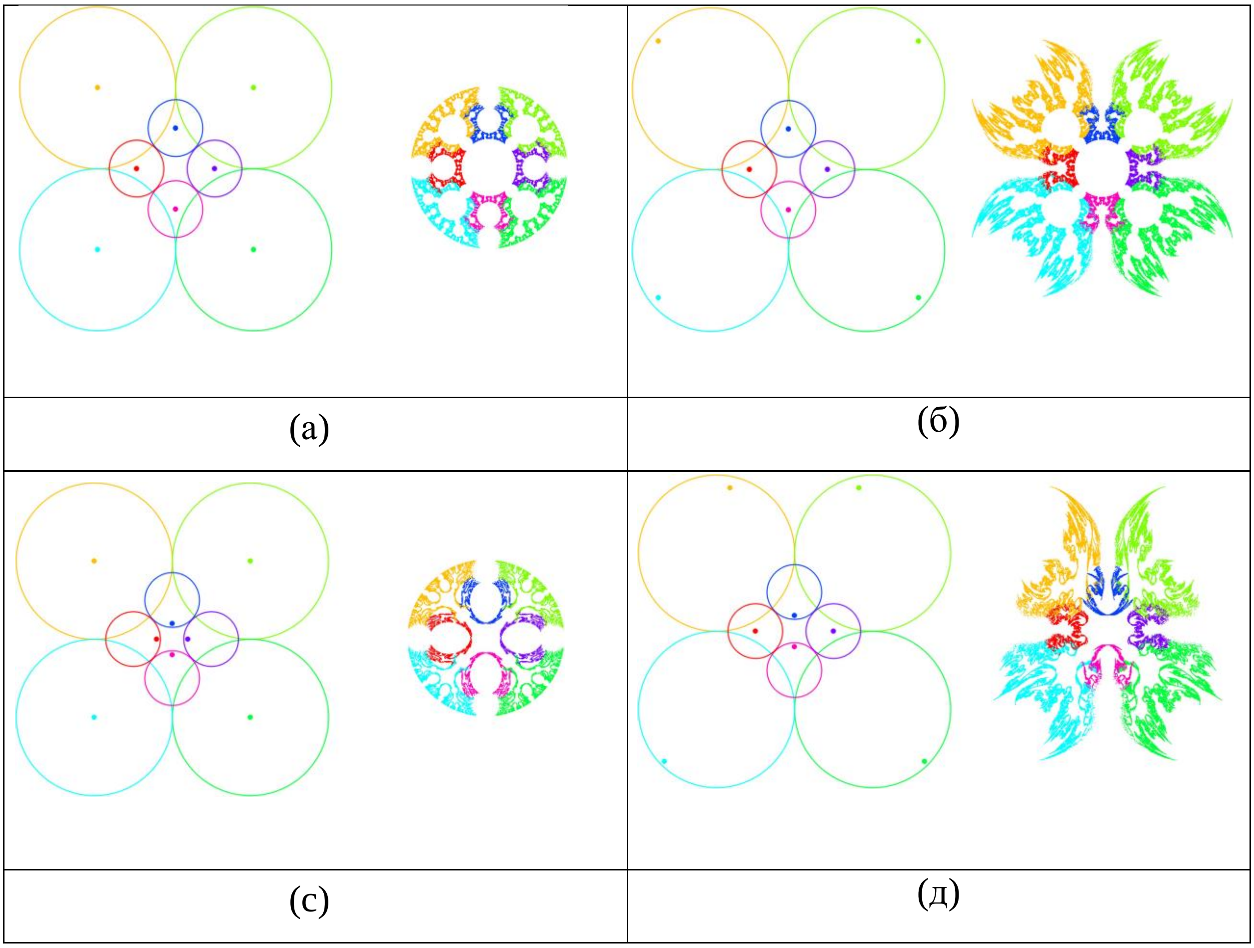
Алгоритм томонидан олинган фрактал яқинлашиш алгоритмда қўлланиладиган ўзгаришларни белгилайдиган юлдуз шакллари тўплами билан ўралган ҳудудда жойлашган. Бу иккинчи чеклов ва (1) ифодадан келиб чиқади. Иккинчи чеклов ўзгартирилиши керак бўлган нуқта конвертациянинг чексиз компонентида бўлишини асослайди ва (1) ифода трансформациядан кейинги нуқтанинг ичида чегара компоненти эканлигини аниқлайди. Шу тарзда яратилган ҳар бир нуқта алгоритмда қўлланиладиган баъзи трансформацияларнинг чекланган компоненти ичида жойлашади.

Табиийки, айлана юлдуз шакллари тўпламидир. Агарда, ядрога тегишли айлананинг маркази инверсия маркази бўлса, юлдуз шаклидаги тўплам инверсия трансформацияси *Сек*дан айлана инверсияси трансформациясига камаяди. Лекин айланалар учун ичкаридаги ядродан исталган нуқтани олиш мумкин. Мисоллар шуни кўрсатадики, айланаларнинг инверсия марказини ўзгартириш дастлабки айлана инверсия фракталини деформация қилиш имкониятини беради [11].

Кўпбурчаклар ва айланалар каби оддий шакллар учун юлдуз тўпламини ўзгартиришни амалга оширишда нурлар билан кесишишларни топиш ва нуқта берилган шаклда мавжудлигини аниқлаш учун мавжуд алгоритмдан фойдаланиш мумкин. Бундан ташқари, юлдуз шаклидаги чегарани моделлаштирганда полином эгри чизиқлар ҳам ўтказилган бўлса, нур ва инклюзия тести билан кесишишни топиш учун тегишли алгоритмлар мавжуд. Умумий ҳолда, бу вазифани ҳал қилиш қийин бўлиши ва шунинг учун амалга оширишда мураккаблик юзага келиши мумкин.

Тадқиқотда фақат *2D* ўзгаришлар кўрсатилган бўлсада, юқоридаги фикрларни 3D гача кенгайтириш мумкин. *3D* да ишлатиладиган тўплам *2D* даги юлдузлар тўпламига ўхшаш хусусиятларга эга бўлиши керак.

4-расмда келтирилган мисол айланасимон инверсион фракталдаги инверсия марказини ўзгартириш жараёнидаги натижани кўрсатади. Фрактал саккизта доира билан ифодаланади. 4 (а)-расмда Фраме ва Когевина усулида олинган фрактал кўрсатилган. 4 (б)-расмда катта доиранинг инверсия маркази айлана чегарасига яқин диагонал силжиганлиги кўрсатилган. Эътибор берилса, фракталнинг шакли ўзгаради ва нуқталарни кенгайтириб боради. 4 (с)-расмда кичик доиранинг инверсия маркази айлана чегарасига яқинлашиши учун ўзгартирилганлиги кўрсатилган. Бундан ташқари, бу ҳолда, шакл нуқтадан кейин келади. 4 (д)-расмда барча катта доираларнинг инверсия марказлари ва иккита кичикроқ доираларнинг инверсия марказлари (расмдаги мос равишда юқори ва пастки позициялар) ўзгариши кўрсатилган. Катта доиранинг маркази ассиметрик равишда силжийди. Бу шаклнинг марказий симметриясини йўқотишига олиб келди, аммо аксиметрия сақланиб қолди. Агар тескари марказни бутунлай ассиметрик тарзда кўчирилса, ассиметрик нақш олинади. Бу мисоллардан кўриниб турибдики, айлана инверсия фракталини осонгина деформация қилиш мумкин.



4-расм: Айлана ва юлдуз шаклли инверсион фракталлар тўпламида айлана бўйлаб инверсия марказини ўзгартиришга мисол.

Ушбу тадқиқот натижасида айлана инверсияси трансформациясини юлдуз шакллари тўпламига умумлаштириш ва натижада айлана инверсион фракталини, юлдузсимон инверсион фракталларни яратиш алгоритми такомиллаштирилди.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W.H. Freeman and Company, New York, 1983).
2. M. Barnsley, *Fractals Everywhere* (Academic Press, Boston, 1988).
3. K. Gdawiec and D. Domanska, Partitioned Iterated Function Systems with Division and a Fractal Dependence Graph in Recognition of 2D Shapes, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* **21**(4) (2011) 757-767.
4. M. Demers and H. Kunze, Fractal-based Methods in Imaging, *Nonlinear Anal.* **71**(12) (2009) e1413-e1419.
5. C. Gentil and M. Neveu, Mixed-aspect Fractal Surfaces, *Comput. Aided Des.* **45**(2) (2013) 432-439.
6. O. Belmonte, S. Sancho and J. Ribelles, Multiresolution Modeling using Fractal Image Compression Techniques, in *Theory and Practice of Computer Graphics*, edited by J. Collomosse, I. Grimstead (Eurographics Association, Sheffield, 2010) pp. 51-58.
7. S. Nikiel, *Iterated Function Systems for Real-time Image Synthesis* (Springer, London, 2007).
8. D. Lv, X. Guo, X. Wang, J. Zhang and J. Fang, Computerized Characterization of Prostate Cancer by Fractal Analysis in MR Images, *J. Magn. Reson. Imaging* 30(1) (2009) 161-168.
9. C.T. Brown, W.R.T. Witschey. and L.S. Liebovitch, The Broken Past: Fractals in Archaeology, *J. Archaeol. Method Theory* **12**(1) (2005) 37-78.
10. Gdawiec, Krzysztof. "Star-shaped set inversion fractals." *Fractals* 22.04 (2014): 1450009.
11. *Shahzoda Anarova*, *Zulaykho Ibrokhimova*, *Golib Berdiev*. An Algorithm for Constructing Equations ofGeometry Fractals Based on Theories ofR-functions. 4th International Symposium on Multidisciplinary Studies and Innovative Technologies,(SCOPUS) ISMSIT 2020 - Proceedings, статья № 9254635, DOI: 10.1109/ISMSIT50672.2020.9254635 24 Dec 2020.