ЭЛАСТИК ПЛАСТИК СИЗИШ МАСАЛАЛАРИ УЧУН ТЎҒРИ ВА ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАРНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

Достон Наим ўғли МУХТОРОВ
Магистр
Самарқанд давлат университети
Самарқанд, Ўзбекистон
dmuxtorov062@gmail.com
Жасурбек Тоштемирович АЛЛАЕВ
ўқитувчи
Самарқанд шаҳаридаги 59-мактаб
Самарқанд, Ўзбекистон
toshtemerovozodbek@gmail.com

Аннотоция

Мазкур мақолада эластик-пластик сизиш масалалари, хусусан ер ости гидромеханикаси масалалари тўғри ва тескари масалалари қаралган. Мақолада тўғри масала берилган тенглама ёки тенгламалар системаси ечимларини топиш, бошланғич ва чегаравий шартларни аниқлашлар таҳлил қилинган.

Таянч сўзлар: коррект, нокоррект, ретроспектив, чегаравий, коэффициент.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМЫХ И ВЕРТИКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВОЛОЧЕВАНИЯ

Достон Наим углы МУХТОРОВ
магистр
Самаркандский государственный университет
Самарканд, Узбекистан
Жасурбек Тоштемирович АЛЛАЕВ
Учитель
школа № 59 города Самарканда
Самарканд, Узбекистан

Аннотоция

Эта статья рассматриваются проблемы упругопластической течи, в частности проблемы подземной гидромеханики, правильные и неправильные. В статье речь идет о поиске решения уравнения или системы уравнений с учетом корректной задачи, определения начальных и граничных условий.

Ключевые слова: правильный, неправильный, ретроспективный, граница, коэффициент.

Математик физиканинг тескари масалалари ҳар хил ишларда қаралган. Асосий эътибор ечимнинг ягоналиги, бу эса масалаларнинг шартли коррект қўйилган масалаларга ажратишдир. Хусусий ҳосилали тенгламалар учун тескари масалалар асосан иссиқлик алмашинув масалаларига қўлланилган. Иссиқлик алмашинуви тескари масалаларининг таснифи О.М.Алифанов [1] томонидан таклиф қилинган.

Нокоррект масалаларни тақрибий ечиш муаммоларига кўплаб ишлар бағишланган, масалан биринчи турдаги оператор тенгламалар учун нокоррект масалаларни ечишнинг итерасион усуллари ишларда тадқиқ этилади. Регуляризация параметрини танлаш энг муҳим ҳисобланади. Математик физиканинг нокоррект масалаларини тақрибий ечишнинг квазимурожат усулининг ҳар хил вариантлари мавжуд. Иссиқлик алмашинувининг коэффициентли тескари масалалари хар хил вақтларда муҳит нуқталарида температура тақсимоти хусусий ҳосилали тенгламалардан аниқланади (иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасидан). $T(x, y, z, t)$ температура майдонини бир қийматли аниқлаш учун қўшимча (ёпувчи) муносабатлар келтирилади. Шундай қилиб хусусий ҳосилали тенгламанинг ечими бир қанча ихтиёрий функцияларгача аниқлик билан топилади. Бу ихтиёрийликни йўқотиш учун қўшимча муносабатлар келтирилади: бир қанча нуқталарда ечимнинг ўзи, йўналишларда ечимдан олинган ҳосила ва ҳ.к. маълум бўлади [3, 5].

Қандайдир танланган фазо соҳасида температура майдонини ҳисоблаш амалга оширилади. Оддийлик учун иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси ечими қидириладиган ўзгармас Ω ҳисоблаш соҳаси билан чегараланади.

Аниқлик учун $t = 0$ вақт моментидан бошлаб қандайдир $t = t_{\max} > 0$ вақт моментигача иссиқлик алмашинув жараёнини тадқиқ этилади [11]. Шунинг учун иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси ечими $Q = \{(x, y, z, t) | (x, y, z) \in \Omega,\ 0 < t < t_{\max}\}$ цилиндрда изланади, яъни

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + f, \quad (x, y, z, t) \in Q. \tag{1}$$

Бу тенглама фазо бўйича ҳам, вақт бўйича ҳам хусусий ҳосилаларни ўз ичига олади. Шу сабабли қўшимча муносабатлар Ω фазовий соҳа ва $(0, t_{\max})$

вақт интервали нуқталари тўпламида, яъни қандайдир Q цилиндр нуқталари тўпламида берилиши керак [2, 7].

Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун одатда чегаравий масалалар қўйилади. Q цилиндр ён сиртидаги шартлар фазовий ўзгарувчилар бўйича шартларга мос келади (Ω фазовий соҳа чегарасида). Шу сабабли бундай шартлар учун чегаравий шартлар терминини ишлатиш қулайдир. Q нинг пастки асосидаги шартлар бошланғич шартларнинг қўйилишига мос келади. Энг мураккаб шартларни ҳам бериш имкони мавжуд. Масалан, $t = 0$ даги бошланғич шартлар ўрнига Q цилиндрнинг бошқа кесимида қўшимча шартларни бериш мумкин, масалан қандайдир $t = t^*$ да. Бошқача айтганда, қўшимча муносабатлар Q соҳа ичида ётган нуқталар тўплами бўлиши мумкин. Бу йўналишдаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун асосий масалалар ҳисобланади.

Одатда бошланғич вақтда температура майдони берилади [8, 9], яъни

$$T(x, y, z, 0) = T^0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega \tag{2}$$

(2) типдаги шартнинг берилиши қандайдир фикцирланган вақт моментида амалий моделлаштиришда температурани тўғридан-тўғри ўлчашни талаб қилади. Бундай ўлчашлар ўтказиш ҳар доим ҳам мумкин эмас. Шунинг учун бошқа ёндашувларни қўллаш мумкин. Масалан, (1) тенглама учун охирги вақт моментида қулай шартлар бўлиши керак, яъни (2) шарт ўрнига қуйидаги шарт берилади:

$$T(x, y, z, t_{\max}) = T^m(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \Omega \tag{3}$$

Бу ҳолда (3) шартлар бўйича олдинги $t < t_{\max}$ вақт моментида иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси асосида температура майдони тикланади. Шундай қилиб иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун ретроспектив масалани таърифлаб берилди.

Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун чегаравий шартлар орасидан асосий биринчи, иккинчи ва учинчи турдаги чегаравий шартлар ажратилади.

Энг оддий ҳолат $\partial\Omega$ чегарада температура майдони берилиши билан характерланади (биринчи турдаги чегаравий шартлар):

$$T(x,y,z,t)=g(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\Gamma \qquad (4)$$

Бу ерда Γ — $\Omega:\Gamma=\{(x,y,z,t)|(x,y,z)\in\partial\Omega, 0<t<t_{\max}\}$ ён сирт. (4) биринчи турдаги шартлар Дирихле шартлари ҳам деб аталади.

Иккинчи турдаги чегаравий шартлар (Нейман шартлари) чегарада иссиқлик оқимини беришга мос келади [12]. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун изотроп муҳитда у қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$k\frac{\partial T}{\partial n}=q(x,y,z,t), \qquad (x,y,z,t)\in\Gamma \qquad (5)$$

бунда $\partial/\partial n$ орқали Ω соҳанинг $\partial\Omega$ чегараси ташқарисига нисбатан нормал белгиланган.

Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун бир қанча асосий масалалар синфини ажратамиз. Аввало бошланғич ва чегаравий шартлар берилиши билан характерланадиган чегаравий масалаларни қаралди. Масалан, тенглама (2) бошланғич шарт ва биринчи тур (4) чегаравий шарт билан тўлдирилувчи (1) иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масала қўйилган бўлиши мумкин.

Мустақил обект тадқиқ қилинаётган, $\partial\Omega_1$ чегаранинг қисмида бир турдаги чегаравий шартлар берилган, чегаранинг қолган $\partial\Omega_2\left(\partial\Omega_2=\partial\Omega/\partial\Omega_1\right)$ қисмида эса бошқа турдаги чегаравий шартлар берилган ҳолни ажратиш мумкин. Масалан, (1.1) тенглама учун чегаравий шартлар ушбу кўринишга эга бўлиши мумкин:

$$T(x,y,z,t)=g(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\Gamma_1$$

$$k\frac{\partial T}{\partial n}=q(x,y,z,t), \qquad (x,y,z,t)\in\Gamma_2$$

Бу ерда $\Gamma_\alpha=\{(x,y,z,t)|(x,y,z)\in\partial\Omega_\alpha, 0<t<t_{\max}\}$, $\alpha=1,2$. Бунда аралаш чегаравий шартларга, аралаш чегаравий масала дейилади.

Юқорида таъкидланган чегаравий масалалар $\partial\Omega$ чегарада (Γ ён сиртда) ва $t = 0$ да (бошланғич шартлар) қўшимча шартлар берилиши билан характерланади. Бу хусусий ҳосилали тенгламалар назариясида яхши тадқиқ қилинган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун энг муҳим масалалар синфи ҳисобланади.

Қаралган чегаравий масалалар коррект қўйилган (Адамар бўйича коррект) масалалар синфига киради. Хусусий ҳосилали тенгламалар учун масала коррект қўйилган масала деб аталади, агар қуйидаги учта шартлар бажарилса:

1) масала ечими мавжуд;

2) бу ечим ягона;

3) ечим тенглама коэффициентларидан ва қўшимча шартлардан (чегаравий ва бошланғич шартлардан) узлуксиз боғлиқ.

Агар бу шартлардан ҳеч бўлмаганда биттаси бузилса ҳам, у ҳолда масала нокоррект қўйилган масалалар синфига киради. Нокорректлик асосан масаланинг берилган параметрларига берилган кичик қўзғалишлар бўйича ечим турғунлиги (3 шарт) бузилиши билан алоқадор.

Чегаравий масалаларни сабаб-оқибат алоқадорлиги нуқтаи назаридан талқин қилиш чегаравий маслани иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун тўғри масала сифатида қарашга имкон беради. Сабаб-оқибат алоқадорлиги бузилиши кўпинча тескари масалаларда кўринади, чунки тескари масалалар нокоррект қўйилган масалалар ҳисобланади.

Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун тескари масалалар қуйидагилардан иборат, ёпувчи зарурий (чегаравий ва бошланғич) шартлар тўла берилмаган ёки тенгламанинг ўзи тўла аниқланмаган (тенгламанинг коэффициентлари, ўнг тарафи берилмаган, ҳисоблаш соҳаси аниқланмаган) бўлади. Бунинг ўрнига ечим, тенглама, соҳа ва ҳ.к. ҳақида қандайдир қўшимча ахборот маълум бўлади. Қўшимча ахборот ҳар хил кўринишда берилиши мумкин. Бу йўналишда бир қанча имкониятлар қуйида қаралади.

$t=0$ да берилган (2) бошланғич шарт ўрнига $t=t_{max}$ да (3) шарт берилгандаги масала иссиқлик ўтказувчанлик учун оддий тескари масалага мисол бўлади (иссиқлик ўтказувчанликнинг ретроспектив тескари масаласи, тескари вақтли масала). Керакли чегаравий шартлар берилмаган ҳолдаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун тескари масалалар муҳим амалий аҳамиятга эга. Масалан, чегаранинг $\partial\Omega_1$ қисмида иккита шарт берилган, чегаранинг $\partial\Omega_2$ қолган қисмида шарт берилмаган бўлса, мисол учун чегаравий шарт чегранинг бир қисмида қуйидагича бўлсин

$$T(x,y,z,t)=g(x,y,z,t), \qquad (x,y,z)\in\Gamma_1 \tag{6}$$

$$k\frac{\partial T}{\partial n}=q(x,y,z,t), \qquad (x,y,z,t)\in\Gamma_1 \tag{7}$$

Бундай ҳолат қандайдир сабабга кўра чегаранинг $\partial\Omega_2$ қисмида температура ва иссиқлик оқимини тўғридан тўғри ўлчаш имкони бўлмаганда рўй беради.

Хусусий ҳосилали тенгламалар учун тескари масалаларнинг бир қатор муҳим типларга ажратилади. Қулайлик учун таснифга мос масалаларни ностационар иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун ўтказилган.

Қуйидаги қаттиқ жисм кесими иссиқлик ҳолати

$$\partial\Omega=\{x\mid x=(x_1,x_2), \qquad 0<x_\alpha<l_\alpha, \alpha=1,2\}$$

ушбу тенглама билан ёзилади

$$c(x)\frac{\partial u}{\partial t}+Lu=f(x,t), \quad x\in\Omega, \qquad 0<t\le T, \tag{8}$$

бунда

$$Lu\equiv-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad x\in\Omega, \tag{9}$$

Чегарада аралаш чегаравий шартлар берилган деб ҳисобланди. Айтайлик

$$\gamma=\{x\mid x\in\partial\Omega, x_2=l_2\},$$

$\Gamma=\partial\Omega/\gamma$ бўлсин. Γ да биринчи тур, γ да эса иккинчи тур шартлар берилсин:

$$u(x,t) = g(x,t), \qquad x \in \Gamma, \tag{10}$$

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = q(x,t), \qquad x \in \gamma, \;\; 0 < t \le T. \tag{11}$$

(8) тенгламани қуйидаги бошланғич шартлар билан тўлдирилди.

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{12}$$

Юқорида ифодаланган (8)-(12) масала иссиқлик алмашинувнинг *тўғри масаласидир*. У Ω ҳисоблаш соҳаси, (8), (9) тенгламалар, (10), (11) чегаравий ва (12) бошланғич шартлар билан характерланади. Бу масала коррект, яъни масала ечими мос синфларда мавжуд, ягона ва берилган маълумотлардан (бошланғич ва чегаравий шартлар, тенглама коэффициентлари ва ҳ.к.) узлуксиз боғлиқ.

Иссиқлик алмашинувнинг *тескари масалалари* деганда (қўйилган (8)-(12) тўғри масалага муносабати бўйича) табиий равишда тўғри масалалар учун зарур маълумотлар берилмаган бўлади, уларнинг ўрнига эса қандайдир қўшимча шартлар берилади. Юқорида келтирилганларга мос равишда тескари масалалар синфини ифодалаш мумкин. Бу масалалар таснифи етишмаётган шартлар билан боғлиқ.

Олдин (12) бошланғич шартлар етишмаётган тескари масалаларни ажратиб олинади. Бундай масалага *иссиқлик алмашинувнинг ретроспектив тескари масаласи* мисол бўлиб хизмат қилади. Бунда бошланғич ҳолат ўрнига охирги вақт моментида ҳолат маълум бўлади. Бу ҳолда ечим (8), (9) тенгламалар, (10), (11) чегаравий шартлар ва қуйидаги шартдан аниқланади:

$$u(x,T) = u^T(x), \qquad x \in \Omega. \tag{13}$$

$t = T$ вақт моментида температура майдони ўлчашлари бўйича аввалги вақт моментларида температура майдонини тиклаш зарур.

(8)-(11), (13) ретроспектив масала $\theta = T - t$ алмаштириш ёрдами билан тескари вақтли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун чегаравий масалага келтирилади $(u = u(x,\theta))$:

$$-c(x)\frac{\partial u}{\partial \theta} + Lu = f(x, T-\theta), \quad x \in \Omega, \;\; 0 < \theta \le T \tag{14}$$

(14) тенглама учун мос чегаравий шартлар ((10), (11) га қаранг) келтирилади. (13) дан қуйидаги бошланғич шартни ҳосил қилинади.

$$u(x,0) = u^T(x), \qquad x \in \Omega. \tag{15}$$

(13) қўшимча шартлар ўрнига (охирги вақт моментида температура ўлчанади) етишмаётган (12) бошланғич шартларни қандайдир даражада ўрнини тўлдирувчи бошқа шартларни бериши мумкин.

Зарурий чегаравий шартларнинг мавжуд эмаслиги иссиқлик алмашинувининг чегаравий тескари масалаларига келади. Бундай тескари масалалар амалий тадқиқотларда жуда катта аҳамиятга эга. Масалан, (8)-(12) тўғри масалага чегаранинг γ қисмида чегаравий шартлар номаълум бўлган чегаравий тескари масала олдинга чиқади. Бунинг ўрнига соҳанинг ички нуқталарида қўшимча температура ўлчашлари ўтказилади. Айтайлик, масалан,

$$\gamma_{\bullet} = \{x \mid x \in \partial\Omega, x_2 = x_2^{\bullet}, 0 \le x_2^{\bullet} < l_2\},$$

ва $\gamma_{\bullet}$ да қуйидаги шарт берилади

$$u(x,t) = g_{\bullet}(x,t), \quad x \in \gamma_{\bullet}, \qquad 0 < t \le T \tag{16}$$

(8), (9), (11), (12), (16) тескари масалада қўшимча шартлар бўйича бутун соҳа бўйлаб ечим тикланади, шу билан бирга γ да иссиқлик оқими (етишмаётган (10) чегаравий шарт) ҳам тикланади. Чегаравий тескари масалалар бошқача қўйилишда ҳам ифодаланади. (16) да $x_2^{\bullet} = 0$ бўлиши мумкин, яъни чегаранинг $\gamma_{\bullet} \subset \Gamma$ қисмида температура ёки оқим берилади.

Мақолада зарурий бошланғич ёки чегаравий шартлар мавжуд бўлмаган, аммо (8), (9) иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси берилган тескари масалаларга мисоллар келтирилди. Иссиқлик алмашинувининг коффициентли тескари масалалари типик тескари масалалардан ҳисобланади. Бунда тенгламанинг ўзи аниқ берилмайди, лекин унинг қандайдир коэффициентини берилади. Аввал чегаравий ва бошланғич шартларни идентификация қилиш ҳақида гап кетган бўлса, энди жараён моделининг ўзи, тенгламанинг ўзи идентификация қилиш ҳақида сўз боради. (8)-(12) га мувофиқ иссиқлик сиғими ($c(x)$), иссиқлик ўтказувчанлик ($k(x)$) коэффициентлари, манбалар (ўнг тараф $f(x,t)$) номаълум бўлади. Қўшимча ахборот (13), (16) типдаги температура ўлчашларидан иборат бўлиши мумкин. Масалан, $k(x)$ ни (8)-(12) ва (13) шартлардан тиклаш талаб қилинади.

Келтирилган иссиқлик алмашинувининг тескари масалалар (ретроспектив, чегаравий, коффициентли) синфи турли туманлигига таъсир қилмайди. Мақолада фақат иссиқлик алмашинувининг асосий, таянч тескари масалаларини ажратдик.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – Москва: Машиностроение, 1988. – 280 с.

2. Басниев К.С., Хайруллин М.Х., Садовников Р.В., Шамсиев М.Н., Морозов П.Е. Исследование горизонтальных газовых скважин при неустановившейся фильтрации // Газовая промышленность. – 2001. №1. – С. 41-43.

3. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. – Москва: МГУ, 1987.

4. Морозов П.Е., Садовников Р.В., Шамсиев М.Н., Хайруллин М.Х. Оценивание фильтрационных параметров пласта по данным нестационарного притока жидкости к вертикальным скважинам // ИФЖ. – 2003. – Т.76. №6. – С. 142-146.

5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач. – Москва: ЛКИ, 2009. – 480 с.

6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука. 1986. – 288 с.

7. Хужаёров Б. Х., Холияров Э. Ч., Шодмонов И. Э. Об одной обратной задаче упруго-пластической фильтрации жидкости в пористой среде // Материалы Международной научно-технической конференции

«Современные проблемы и перспективы механики». – Ташкент, 17-18 мая 2006 года. – С. 167-169.

8. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З. Граничная обратная задача при упругом режиме фильтрации однородной жидкости в пористой среде // Сборник материалов IV-международной конференции «Проблемы развития инженерных коммуникаций». – Самарканд, 17-21 мая 2010. – С. 48-50.

9. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З., Нурматов Г. Обратная задача по восстановлению граничных условий при фильтрации жидкости в пористой среде // Сборник материалов Республиканской научной конференции «Проблемы современной математики». – Карши, 22-23 апреля 2011 года. – С. 547-550.

10. Hao D. Methods for inverse heat conduction problems. – Peter Lang pub. Inc. 1998. – 249 p.

11. Sun N.-Z. Inverse problems in Groundwater modeling. Kluwer Acad. Norwell. Mass. – 1994. – 337 p.

12. Weber C.F. Analysis and Solution of the Ill-Posed Inverse Heat Conduction Problem, Int. J. Heat Mass Transfer, 24(11), 1783-1792 (1981).